ist $\tilde{\mathrm{II}}_p$ nicht an die Existenz von globalen Normalenfeldern geknüpft, und kann daher für beliebige 2-Mannigfaltigkeiten $\subset \mathbb{R}^3$ eingeführt werden.

Wir geben noch eine (vgl. Do Carmo, p. 16 f und p. 142 f)

Geometrische Interpretation von II_p:

Seien $p \in S$ und $\xi \in T_p S$ mit $|\xi| = 1$. Man wählt eine Kurve α in S mit

$$\alpha(0) = p \;, \quad \dot{\alpha}(0) = \xi$$

und $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ (Parametrisierung nach der Bogenlänge).
Es gilt

$$\mathcal{N}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0 \implies$$

$$\mathrm{II}_p(v,v) = -d\mathcal{N}_p(v) \cdot v = -\frac{d}{dt}\Big|_0 \big(\mathcal{N}(\alpha(t))\big) \cdot \dot{\alpha}(0) =$$

$$\mathcal{N}(0) \cdot \ddot{\alpha}(0).$$

$\ddot{\alpha}(0)$ ist bekanntlich der Krümmungsvektor an α zur Zeit 0, so daß $\mathrm{II}_p(v,v)$ den Krümmungsanteil senkrecht zur Fläche S angibt.

$\square$

Kehren wir zurück zum Differential $d\mathcal{N}_p$ der Gauß-Abbildung:
Die Symmetrie der linearen Abbildung ergibt sofort
($\rightarrow$ vgl. Do Carmo, "Theorem" auf p. 216)

LEMMA 1.3: Es gibt eine orthonormale Basis ξ, η in $T_p S$ bestehend aus Eigenvektoren von $d\mathcal{N}_p$, d.h.

$$d\mathcal{N}_p(\xi) = -k_1 \cdot \xi ,$$

$$d\mathcal{N}_p(\eta) = -k_2 \cdot \eta ,$$

wobei die Vorzeichenwahl für die Eigenwerte $-k_1, -k_2$ wieder historische Gründe hat.

DEFINITION: Die negativen Eigenwerte k_1, k_2 heißen <u>Hauptkrümmungen</u>, die zugehörigen Vektoren ξ, η entsprechend <u>Hauptkrümmungsrichtungen</u>. Man bekommt k_1, k_2 als Extremwerte von

$$\{ w \in T_p S : |w| = 1 \} \ni v \longrightarrow \mathrm{II}_p(v,v).$$

$$H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{Spur} d\mathcal{N}_p$$

heißt <u>mittlere Krümmung von S bei p</u>,

$$K := k_1 \cdot k_2 = \det d\mathcal{N}_p$$

ist die <u>Gauß Krümmung von S bei p</u>.

BEMERKUNG: Wir betrachten zur Vereinfachung nur global parametrisierte Flächen $S = F(\Omega)$ und beziehen uns stets auf das Normalenfeld

$$\mathcal{N}(p) = \left(\partial_u F \times \partial_v F\right) \Big/ \left|\partial_u F \times \partial_v F\right| \; \left(F^{-1}(p)\right) ,$$

insbesondere ändert $H(p)$ (wie auch II_p) das Vorzeichen, wenn man zu einer anderen Orientierung übergeht. Zur Vermeidung dieser Orientierungsabhängigkeit betrachtet man in der Regel den

<u>mittleren Krümmungsvektor</u> $\underline{\underline{H}}(p) := H(p)\,\mathcal{N}(p)$,

der sich bei Ersetzung von $\mathcal{N}$ durch $-\mathcal{N}$ nicht ändert. Außerdem läßt sich $\underline{\underline{H}}$ auch für beliebige nicht notwendig orientierbare definieren; dazu wählt man einfach lokal in der Nähe eines Punktes p ein Normalenfeld (dies existiert immer, da eine 2 Mannigfaltigkeit ja lokal parametrisiert werden kann).

Wir berechnen nun die 1te Variation des Flächeninhalts $A(S)$ und stellen den Zusammenhang zur mittleren Krümmung her: Zunächst erinnern wir an die Formel

$$\mathbb{A}(S) = \int_\Omega |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du\, dv$$

bzw.

$$\mathbb{A}(S) = \int_\Omega \sqrt{\det(g_{ij})} \, du\, dv,$$

wo

$$g_{11} := \partial_1 F \cdot \partial_1 F, \quad g_{22} = \partial_2 F \cdot \partial_2 F,$$

$$g_{12} := \partial_1 F \cdot \partial_2 F$$

die sogenannte 1te Fundamentalform von S ist.

Seien $N(u,v) := \mathcal{N}(F(u,v))$, $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Man bildet mit $F_\varepsilon(u,v) := F(u,v) + \varepsilon \cdot \underbrace{\varphi(u,v)\, N(u,v)}_{=:\, \Psi(u,v)}$

die durch normale Variation entstehende Vergleichsfläche $S_\varepsilon = F_\varepsilon(\Omega)$ mit Inhalt

$$A(S_\varepsilon) = \int_\Omega \sqrt{\det g^\varepsilon}\, du\, dv ,$$

$$g_\varepsilon = \begin{pmatrix} \partial_1 F_\varepsilon \cdot \partial_1 F_\varepsilon & \partial_2 F_\varepsilon \cdot \partial_1 F_\varepsilon \\ \partial_1 F_\varepsilon \cdot \partial_2 F_\varepsilon & \partial_2 F_\varepsilon \cdot \partial_2 F_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} A(S_\varepsilon) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0} \sqrt{\det g^\varepsilon}\, du\, dv =$$

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \left(\det g^0\right)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0} \det g^\varepsilon\, du\, dv$$

mit

$$\det g^\varepsilon = |\partial_1 F|^2 \cdot |\partial_2 F|^2 - (\partial_1 F \cdot \partial_2 F)^2$$

$$+ 2 \cdot \varepsilon \left[|\partial_2 F|^2\, \partial_1 F \cdot \partial_1 \Psi + |\partial_1 F|^2\, \partial_2 F \cdot \partial_2 \Psi \right]$$

$$- \varepsilon \cdot 2 \left[(\partial_1 F \cdot \partial_2 F)(\partial_2 \Psi \cdot \partial_1 F) + (\partial_1 F \cdot \partial_2 F)(\partial_2 F \cdot \partial_1 \Psi) \right]$$

$$+ \text{Terme mit Vorfaktor } \varepsilon^2 \implies$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0} \det g^\varepsilon = 2 \cdot \left(|\partial_1 F|^2\, \partial_2 F \cdot \partial_2 \Psi + |\partial_2 F|^2\, \partial_1 F \cdot \partial_1 \Psi \right) -$$

$$- (\partial_1 F \cdot \partial_2 F) \cdot 2 \cdot (\partial_1 F \cdot \partial_2 \Psi + \partial_2 F \cdot \partial_1 \Psi).$$

Nun benutzt man die für $i, j \in \{1,2\}$ gültige Beziehung

$$\partial_i \Psi \cdot \partial_j F = \partial_i (\varphi N) \cdot \partial_j F = \partial_i \varphi \; N \cdot \partial_j F + \varphi \cdot \partial_i N \cdot \partial_j F =$$

$$\varphi \cdot \partial_i N \cdot \partial_j F = - \mathrm{II} (\partial_i F, \partial_j F) \cdot \varphi ,$$

die wir uns vorhin im Zusammenhang mit der Symmetrie der zweiten Fundamentalform überlegt haben. Dabei geht natürlich die Orthogonalitätsrelation

$$N \cdot \partial_j F = 0$$

ein. Man bekommt:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^{\varepsilon} = -2 \cdot \varphi \cdot \big[|\partial_1 F|^2 \; \mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) + |\partial_2 F|^2 \cdot \mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_1 F)$$
$$- 2 \cdot (\partial_1 F \cdot \partial_2 F) \; \mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_2 F) \big]$$

(1)

Die rechte Seite von (1) soll nun in Terme mit H umgeformt werden. Per Definition ist

$$H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{Spur} dN_p =$$

$$\frac{1}{2} \left(\mathrm{II}_p (\xi, \xi) + \mathrm{II}_p (\eta, \eta) \right),$$

wobei ξ, η eine beliebige Orthonormalbasis von $T_p S$ repräsentiert.

Eine solche können wir aus den Basisvektoren $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ wie folgt erzeugen:

$$\xi := \partial_1 F / |\partial_1 F| \quad , \quad \tilde{\eta} := \partial_2 F - (\partial_2 F \cdot \xi)\, \xi ,$$

$$\eta := \tilde{\eta} / |\tilde{\eta}| .$$

Es gilt $\quad |\tilde{\eta}|^2 = |\partial_2 F|^2 - (\partial_2 F \cdot \xi)^2 =$

$$|\partial_1 F|^{-2} \cdot \det g ,$$

und damit

$$H = \frac{1}{2} \left(\mathrm{II}(\xi,\xi) + |\tilde{\eta}|^{-2}\, \mathrm{II}(\tilde{\eta},\tilde{\eta}) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\mathrm{II}(\xi,\xi) + |\tilde{\eta}|^{-2}\, \mathrm{II}\left(\partial_2 F - (\partial_2 F \cdot \xi)\xi,\ \partial_2 F - (\partial_2 F \cdot \xi)\xi \right) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \Big(\mathrm{II}(\xi,\xi) + |\tilde{\eta}|^{-2} \cdot \mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) + |\tilde{\eta}|^{-2} \cdot (\partial_2 F \cdot \xi)^2\, \mathrm{II}(\xi,\xi)$$

$$- 2\, |\tilde{\eta}|^{-2}\, \mathrm{II}(\partial_2 F, \xi)\, (\partial_2 F \cdot \xi) \Big) =$$

$$\frac{1}{2} \Big(\mathrm{II}(\xi,\xi) \cdot \left[1 + |\tilde{\eta}|^{-2} (\partial_2 F \cdot \xi)^2 \right]$$

$$+ |\tilde{\eta}|^{-2} \cdot \mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) - 2 \cdot |\tilde{\eta}|^{-2} (\partial_2 F \cdot \xi)\, \mathrm{II}(\partial_2 F, \xi) \Big) =$$

$$\frac{1}{2} \Big(|\tilde{\eta}|^{-2} \cdot |\partial_2 F|^2 \cdot \mathrm{II}(\xi,\xi) + |\tilde{\eta}|^{-2}\, \mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F)$$
$$- 2 \cdot |\tilde{\eta}|^{-2}\, (\partial_2 F \cdot \xi)\, \mathrm{II}(\partial_2 F, \xi) \Big) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot |\tilde{\eta}|^{-2}\, |\partial_1 F|^{-2} \Big(|\partial_2 F|^2 \cdot \mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) + |\partial_1 F|^2 \cdot \mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F)$$
$$- 2 \cdot (\partial_1 F \cdot \partial_2 F) \cdot \mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_2 F) \Big)$$

Das liefert folgende Formel für die mittlere Krümmung:

$$\boxed{H\big|_F = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\det g}\cdot\Big[\,|\partial_2 F|^2\cdot \mathrm{II}(\partial_1 F,\partial_1 F) + |\partial_1 F|^2\,\mathrm{II}(\partial_2 F,\partial_2 F) - 2\cdot(\partial_1 F\cdot\partial_2 F)\,\mathrm{II}(\partial_1 F,\partial_2 F)\Big]} \tag{2}$$

Kombiniert man schließlich (1), (2), so lautet die 1te Variation des Flächeninhalts

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0}\,\mathbb{A}(S_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{\det g}^{\,-1}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0}\det g^\varepsilon\;du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (-2\cdot\varphi)\;2\cdot\sqrt{\det g}\cdot H\big|_F\;du\,dv$$

$$= -2\cdot\int_\Omega \varphi\cdot H\big|_F\cdot\sqrt{\det g}\;du\,dv$$

Ist S eine Minimalfläche in dem Sinne, daß

$$\mathbb{A}(S) \le \mathbb{A}(S_\varepsilon)$$

für alle wie oben erzeugten Vergleichsflächen S_ε gilt, so folgt

$$\int_\Omega \varphi\cdot H\big|_F\,\sqrt{\det g}\;du\,dv = 0$$

für beliebige Funktionen φ mit kompaktem Träger in Ω, und wir schließen wegen $\det g > 0$ ($\Leftrightarrow$ DF hat Rang 2)

<u>SATZ 2.1:</u> Sei $\mathcal{S} = F(\Omega)$ eine über dem Gebiet Ω regulär parametrisierte Fläche. Wenn $\mathcal{S}$ unter allen über Ω parametrisierten Flächen $\mathcal{S}^*$ mit gleichem Rand den Flächeninhalt minimiert, so folgt:

$$H \equiv 0.$$

<u>BEMERKUNGEN:</u> 1) Wie schon mehrfach gesagt, ist die mittlere Krümmung H ein nur für global orientierbare Flächen S im $\mathbb{R}^3$ sinnvoller Begriff und abhängig davon, für welche Orientierung man sich entscheidet, d.h. man muß stets ein globales Normalenfeld auf S auszeichnen, auf das man sich bei der Berechnung von H bezieht. Für lokal flächenminimierende Objekte ist das natürlich unerheblich: H verschwindet unabhängig von der fixierten Orientierung.

2) Grundsätzlich kann man "Flächeninhalt" (als 2-dimensionales Hausdorff Maß) auch für nicht orientierbare Flächen erklären. Für diese Objektklasse hat man ferner die vektorielle mittlere Krümmung $\underline{\underline{H}}$, und die Aussage von Satz 2.1 lautet entsprechend:

<u>Ist S eine lokal minimale Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^3$, so gilt $\underline{\underline{H}} = 0$ bzw. $H = 0$, wenn man H bzgl. beliebiger lokaler Parametrisierungen bildet.</u>

□

Zur Vertiefung der geometrischen Begriffe wollen wir die mittlere Krümmung für Graphen $S = G_f$ ausrechnen und damit auch die Verbindung zur Minimalflächengleichung aus Satz 1.1 herstellen.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 und $S = G_f$ der zugehörige Graph. Als kanonische Parametrisierung bietet sich an

$$F(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

mit dem Normalenfeld

$$\mathcal{N}(F(u,v)) = N(u,v) = (-\nabla f(u,v), 0) \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f|^2(u,v)}.$$

Dazu gehören die folgenden Größen:

$$\partial_1 F = (1, 0, \partial_1 f), \quad \partial_2 F = (0, 1, \partial_2 f), \quad \partial_1 F \cdot \partial_2 F = \partial_1 f\, \partial_2 f,$$

$$\det g = \det \begin{pmatrix} \partial_1 F \cdot \partial_1 F & \partial_2 F \cdot \partial_1 F \\ \partial_1 F \cdot \partial_2 F & \partial_2 F \cdot \partial_2 F \end{pmatrix} = \left(1 + (\partial_1 f)^2\right) \cdot \left(1 + (\partial_2 f)^2\right) - \left(\partial_1 f \cdot \partial_2 f\right)^2$$

$$= 1 + |\nabla f|^2,$$

$$\mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) = -\partial_1 F \cdot \partial_1 N = -(1, 0, \partial_1 f) \cdot \frac{(-\partial_1\partial_1 f, -\partial_1\partial_2 f, 0) \cdot \sqrt{1+|\nabla f|^2}}{1 + |\nabla f|^2}$$

$$= \partial_1 \partial_1 f \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

$$\mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) = \partial_2 \partial_2 f \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

$$\mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_2 F) = -\partial_2 F \cdot \partial_1 N = -(0, 1, \partial_2 f) \cdot \frac{(-\partial_1\partial_1 f, -\partial_1\partial_2 f, 0) \sqrt{1+|\nabla f|^2}}{1 + |\nabla f|^2}$$

$$= \partial_1 \partial_2 f \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f|^2}.$$

Aus (2) folgt:

$$H\big|_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left[(1+(\partial_2 f)^2)\cdot\frac{\partial_1\partial_1 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + (1+(\partial_1 f)^2)\,\frac{\partial_2\partial_2 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right.$$

$$\left. - 2\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f\cdot\partial_1\partial_2 f\,\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-3/2}\left\{\partial_1\partial_1 f\cdot(1+(\partial_2 f)^2) + \partial_2\partial_2 f\cdot(1+(\partial_1 f)^2)\right.$$

$$\left. - 2\cdot\partial_1 f\cdot\partial_2 f\cdot\partial_1\partial_2 f\right\}.$$

Aus dieser Gleichung liest man ab:

> f ist Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung $\Longleftrightarrow$
> die mittlere Krümmung H von G_f verschwindet identisch.

Wir haben uns mit vorstehenden Überlegungen davon überzeugt, daß unser Ausgangsproblem "finde Flächen kleinsten Inhalts" notwendig auf das Studium von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung führt, d.h. Minimalflächen im eigentlichen Sinn erfüllen insbesondere $H \equiv 0$. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir einige allgemeine Eigenschaften von regulär parametrisierten Flächen mit mittlerer Krümmung $\equiv 0$, als Folgerung unserer Überlegungen charakterisieren wir mit funktionentheoretischen Argumenten gewisse Klassen von regulär parametrisierten Flächen, deren Krümmung H verschwindet.